TRABAJO PRÁCTICO IV

1) Resolver los siguientes problemas de cálculo de variaciones.

a) $\begin{cases} \max \quad J(x(t)) = \int_1^5 3t + \dot{x}^{1/2}\, dt \\ \text{con} \quad x(1) = 3 \quad x(5) = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \min \quad J(x(t)) = \int_0^5 t + x^2 + 3\dot{x}\, dt \\ \text{con} \quad x(0) = 0 \quad x(5) = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \min \quad J(x(t)) = \int_0^3 1 + \dot{x}^2 dt \\ \text{con} \quad x(0) = \alpha \quad x(3) = \beta \end{cases}$

d) $\begin{cases} \min \quad J(x(t)) = \int_0^1 t\,\dot{x} + \dot{x}^2 dt \\ \text{con} \quad x(0) = 1 \quad x(1) = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \max \quad J(x(t)) = \int_0^2 -12t\,x - \dot{x}^2 dt \\ \text{con} \quad x(0) = 2 \quad x(2) = 12 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \max \quad J(x(t)) = \int_0^1 t\,x - x^2 - 2x^2\dot{x}\; dt \\ \text{con} \quad x(0) = 2 \quad x(1) = 5 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \max \quad J(x(t)) = \int_0^1 t\,x - x^2 - 2x^2\dot{x}\; dt \\ \text{con} \quad x(0) = 0 \quad x(1) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

h) $\begin{cases} \min \quad J(x(t)) = \int_0^1 e^{-rt}\,(4x + 2\dot{x}^2)\, dt \\ \text{con} \quad x(0) = 0 \quad x(1) = 1 \end{cases}$

2) Resolver los siguientes problemas de cálculo de variaciones

a) $\begin{cases} \min \quad J(x(t)) = \int_0^1 t\,\dot{x} + \dot{x}^2\,dt \\ \text{con} \quad x(0) = 1 \quad x(1) \text{ libre} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \min \quad J(x(t)) = \int_0^1 t\,\dot{x} + \dot{x}^2\,dt \\ \text{con} \quad x(0) = 1 \quad x(1) \geq 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \min \quad J(x(t)) = \int_0^{t_1} \dot{x}^2 - 8\,x\,t + t\,dt \\ \text{con} \quad x(0) = -\dfrac{1}{24} \quad t_1 > 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \min \quad J(x(t)) = \int_1^{t_1} x + t\,\dot{x} + \dot{x}^2\,dt \\ \text{con} \quad x(1) = 3 \quad x(t_1) = 4 \end{cases}$

3) Resolver los siguientes problemas.

a) $\begin{cases} \min \quad J(x(t)) = \int_0^{\pi/2} 2\,t\,x\,\dot{x} + \dot{x}^2 dt + 2\,x\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \text{con} \quad x(0) = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \max \quad J(x(t)) = \int_1^3 t\,\dot{x} - \dot{x}^2 + x\,dt - [x(3)]^2 \\ \text{con} \quad x(1) = 1 \end{cases}$

APLICACIONES ECONÓMICAS

4) *Optimización dinámica de un monopolista:* Consideremos una firma monopolista que produce un único artículo con la siguiente función de costo:

$$C = \alpha Q^2 + \beta Q + \gamma \quad \text{donde} \quad \alpha, \gamma > 0 \quad \beta \geq 0$$

La cantidad demandada Q no sólo depende del precio $P(t)$ sino también de la razón de cambio de precio $P'(t)$:

$$Q = a - b\,P(t) + h\,P'(t) \quad \text{donde} \quad a, b > 0 \quad \text{y} \quad h \neq 0$$

El beneficio de la firma está dado por: $\pi(P, P') = PQ - C$

El objetivo de la firma es encontrar la trayectoria óptima del precio P que maximice el beneficio total π en un período finito de tiempo $[0, T]$. Se asume que este período es suficientemente pequeño como para justificar la hipótesis de demanda y costo fijos como

también la omisión de un factor de descuento. Además, como una primera aproximación del problema se asume que P_0 y P_T están dados.

a) Plantear el problema.
b) Plantear la ecuación de Euler y calcular el extremal para el problema dado.

5) Consideremos ahora el mismo problema que se planteó en el ejercicio 4) pero con instante final dado y variable de estado final acotada inferiormente.
Calcular el extremal para el intervalo $[0,2]$ con $P(2) \geq 10$ y considerando:

$$\alpha = \frac{1}{10} \qquad \beta = 0 \qquad \gamma = 1000 \qquad a = 160 \qquad b = 8 \qquad h = \frac{1}{10}$$

6) En el instante t_0 una empresa dispone de un stock $x(t_0) = x_0$ de un determinado producto. El mantenimiento de cada unidad de dicho stock lleva aparejado un costo instantáneo de $c(t)$ unidades monetarias. El costo de almacenaje está dado por la función $C(x) = cx$. La venta de q unidades del producto en el mercado produce un beneficio que viene dado por la función $\pi(q)$, que se supone es cóncava. Si denotamos con $q(t)$ la cantidad de producto que se vende en el instante t, entonces el stock evoluciona temporalmente de acuerdo con la ecuación diferencial:

$$\dot{x}(t) = -q(t)$$

La empresa desea distribuir sus existencias de modo óptimo durante cierto horizonte de planificación $[t_0, t_1]$, de modo que maximice su beneficio total neto (es decir, $\Pi(x, \dot{x}) = \pi(-\dot{x}) - C(x)$) a lo largo de ese período.
El problema al que se enfrenta la empresa es, por lo tanto:

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \pi(-\dot{x}) - cx \, dt \\ \text{con} \qquad x(t_0) = x_0 \qquad x(t_1) \geq 0 \end{cases}$$

a) Plantear la ecuación de Euler y dar una interpretación económica a dicho resultado.
b) Plantear la condición de transversalidad y dar una interpretación económica del resultado obtenido.
c) Suponga ahora que a la empresa le está permitido vender más producto del que tiene disponible en el almacén. En tal caso, ya no habría que exigir que $x(t_1) \geq 0$. Plantear la nueva condición de transversalidad.
d) Indicar si la condición suficiente se verifica para el problema planteado.

7) Supongamos ahora que la empresa del ejercicio 6) sabe que en el momento t_1 se celebrará una feria bianual del bien en cuestión en la cual, teniendo en cuenta la situación del mercado y la experiencia de ferias pasadas, espera obtener un ingreso de $S[x(t_1)]$.
El objetivo ahora de la empresa consiste en maximizar su beneficio total neto descontando a lo largo del horizonte temporal $[t_0, t_1]$, es decir:

$$\begin{cases} \max \quad \int_{t_0}^{t_1} e^{-\delta t}\left[-p\ \dot{x} - cx\right] dt + e^{-\delta t_1} S\left[x(t_1)\right] \\ \text{con} \qquad x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

en donde δ es el tipo de interés con capitalización continua.

a) Plantear la ecuación de Euler y dar una interpretación económica a dicho resultado.
b) Plantear la condición de transversalidad y dar una interpretación económica del resultado obtenido.

RESPUESTAS

1)

a) $x(t) = t + 2$

b) No existe extremal

c) Sólo tiene extremal $x(t) = At + B$ si $\alpha = B$ y $A = \dfrac{\beta - \alpha}{3}$

d) $x(t) = -\dfrac{1}{4}t^2 + \dfrac{1}{4}t + 1$

e) $x(t) = t^3 + t + 2$

f) No existe extremal

g) El extremal es $x(t) = \dfrac{t}{2}$ pero no podemos determinar si es óptimo.

h) $x(t) = \dfrac{1}{1-e^r}\left(1 + \dfrac{1}{r}\right)\left(1 - e^{rt}\right) - \dfrac{1}{r}t$

2)

a) $x(t) = -\dfrac{1}{4}t^2 + 1$

b) $x(t) = -\dfrac{1}{4}t^2 + \dfrac{1}{4}t + 1$

c) $x(t) = -\dfrac{2}{3}t^3 + \dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{24}$ con $t_1^* = \dfrac{1}{2}$ y $x_1^* = \dfrac{1}{8}$

d) $x(t) = 2t + 1$ con $t_1^* = \dfrac{3}{2}$

3)

a) El extremal es $x(t) = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{sen} t + 2\cos t$ No se puede concluir que sea óptimo.

b) $x(t) = \dfrac{1}{6}t + \dfrac{5}{6}$

4)

a) $\begin{cases} \max \displaystyle\int_0^T \Pi(P, P')\, dt \\ \text{con} \qquad P(0) = P_0 \qquad P(T) = P_T \end{cases}$

b) La ecuación de Euler para este problema será:

$$P'' - \frac{b(1+\alpha b)}{\alpha h^2} P = -\frac{a + 2a\alpha b + b\beta}{2\alpha h^2}$$

La solución de esta ecuación diferencial de segundo orden es:

$$P(t) = C_1\, e^{rt} + C_2\, e^{-rt} + \overline{P}$$

donde

$$r = \sqrt{\frac{b(1+\alpha b)}{\alpha h^2}} \qquad \text{y} \qquad \overline{P} = \frac{a + 2a\alpha b + b\beta}{2b(1+\alpha b)}$$

Vamos a determinar las constantes:

$$P(0) = C_1 + C_2 + \overline{P} = P_0$$

$$P(T) = C_1\, e^{rT} + C_2\, e^{-rT} + \overline{P} = P_T$$

Al resolver el sistema nos queda:

$$C_1 = \frac{P_0 - \overline{P} - (P_T - \overline{P})e^{rT}}{1 - e^{2rT}} \qquad \text{y} \qquad C_2 = \frac{P_0 - \overline{P} - (P_T - \overline{P})e^{-rT}}{1 - e^{2rT}}$$

5) $P(t) = 0{,}467\ e^{0{,}12\,t} - 3{,}467\ e^{-0{,}12\,t} + \dfrac{130}{9}$

6)

a) La ecuación de Euler para este problema es:

$$F_x - \frac{dF_{\dot{x}}}{dt} = -c + \frac{d\pi'}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{d\pi'}{dt}$$

Esta última ecuación tiene la siguiente interpretación: al decidir qué cantidad de producto extraer de su stock, la empresa compara las ganancias y las pérdidas derivadas de mantener el stock o venderlo. El lado izquierdo representa el costo marginal de mantener una unidad de producto en stock (costo de almacenaje). El lado derecho representa la ganancia derivada de mantener una unidad de stock, es decir, cuánto aumenta en el tiempo el beneficio marginal que se podrá obtener por esa unidad.

b) Como el valor final del stock está restringido a ser no negativo, la condición de transversalidad es:

$$F_{\dot{x}}\big|_{t=t_1} \le 0 \quad (=0,\ \text{si}\ \ x(t_1) > 0) \quad \Rightarrow \quad \pi'\big|_{t=t_1} \ge 0 \quad (=0,\ \text{si}\ \ x(t_1) > 0)$$

La interpretación de esta condición es la siguiente: en el instante final, ya no tiene objeto mantener stock para futuras ventas y, por lo tanto, deberán venderse las existencias hasta que se agoten ($x(t_1) = 0$), o bien, hasta que el beneficio marginal sea cero.

c) La condición de transversalidad para el caso de instante final dado y estado final libre es:

$$F_{\dot{x}}\big|_{t=t_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi'\big|_{t=t_1} = 0$$

Esto quiere decir que se deberá vender exactamente aquella cantidad que haga que el beneficio marginal sea cero.

d) $H\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pi'' \end{pmatrix}$. Como π es una función cóncava (entonces $\pi'' < 0$) esta matriz es semidefinida negativa. Por lo tanto la función beneficio neto es cóncava.

7)

a) La ecuación de Euler para este problema es:

$$F_x - \frac{dF_{\dot{x}}}{dt} = e^{-\delta t}c - \frac{d}{dt}(e^{-\delta t}p) = e^{-\delta t}c + \delta e^{-\delta t}p - e^{-\delta t}\dot{p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{p} - c = \delta\, p$$

Esta última ecuación tiene la siguiente interpretación: para que la venta de unidades de producto se dé a un ritmo óptimo, el beneficio de vender una unidad adicional de producto debe ser igual al beneficio de mantener una unidad adicional en stock. El lado derecho representa la ganancia derivada de vender una unidad de stock, que es igual al ingreso obtenido por la venta, multiplicado por el tipo de interés que se puede obtener invirtiendo dicho ingreso. El lado izquierdo representa la ganancia de mantener el stock, que es igual a la revalorización del producto, es decir, el incremento de precio menos el costo de almacenaje.

b) La condición de transversalidad es:

$$p(t_1) = \frac{dS[x(t_1)]}{dx}$$

Tiene la siguiente interpretación: el stock que se conserva en el instante final debe ser aquel que hace que el ingreso marginal obtenido en la feria sea precisamente el precio de mercado vigente en el instante t_1.